МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет» (ТГПУ)

УТВЕРЖДАЮ
Директор Центра ДФМиЕНО
Червонный М.А.
____
09 января 2023 г.

Центр дополнительного физико-математического и естественнонаучного образования

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к олимпиадам по математике»

Автор программы:
Подстригич А. Г.,
заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике, доцент, к.п.н.

Томск 2023 г.

Содержание

1. Паспорт программы

Аннотация программы	Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к олимпиадам по математике» направлена на совершенствование навыков решения задач повышенного и высокого уровней сложности, достаточных для успешного участия в олимпиадах по математике. В процессе обучения по программе «Подготовка к олимпиадам по математике» обучающиеся изучат различные виды олимпиадных заданий (тестовые, творческие, вопросы, требующие письменного ответа, и др.), научатся нестандартно подходить к решению олимпиадных задач. Программа «Подготовка к олимпиадам по математике» состоит из трех разделов: «Логические задачи», «Специальные инструменты олимпиадной математики», «Геометрические задачи»». Разделы выстроены в единой логике, обеспечивая переход от знания к навыку и от простого к сложному. Обучающийся вправе освоить как все модули, так и один или несколько модулей в соответствии со своими образовательными потребностями.
Направленность дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Естественнонаучная
Вид деятельности дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Математика
Категория обучающихся	16–18 лет (обучающиеся 9–11 классов)
Срок обучения	72 часа
Форма обучения	очная
Режим занятий	2 ч в неделю
Ожидаемое минимальное и максимальное число обучающихся в одной группе	7–20
Категория состояния здоровья обучающихся, которые могут быть зачислены на обучение по дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программе	Программа рассчитана на детей без ОВЗ

2. Актуальность программы

Актуальность программы обусловлена необходимостью развития способностей обучающихся, имеющих высокую мотивацию к изучению математики, и их подготовки к результативному участию в олимпиадах различного уровня.

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к олимпиадам по математике» направлена на повышение уровня математической культуры обучающихся, формирование необходимой основы для успешного выступления на математических олимпиадах различных уровней.

Олимпиадное движение – очень важное направление в обучении детей, где помимо углубленного изучения материала ребенок получает важный опыт работы по участию в олимпиадах. Благодаря такому опыту школьник в дальнейшем более уверенно чувствует себя на других испытаниях и может показывать лучший результат. Кроме того, олимпиада, являясь интеллектуальным соревнованием, позволяет школьнику не только почувствовать дух соперничества, но и принять себя как часть интеллектуального сообщества, самовыразиться и получить признание своих успехов. Важным бонусом является и то, что, победив на олимпиаде, старшеклассник может облегчить себе поступление в престижный вуз.

В процессе обучения по программе «Подготовка к олимпиадам по математике» обучающиеся знакомятся с форматом основных региональных и всероссийских олимпиад по математике, практикуются в выполнении олимпиадных заданий разного уровня сложности. Обучение по программе позволяет ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы.

3. Цели и задачи

Организационно-педагогической целью образовательной программы «Подготовка к олимпиадам по математике» является создание образовательного пространства, позволяющего подготовить обучающихся к успешному участию в олимпиадах по математике.

Дидактическая цель программы – развитие мышления (в частности нестандартного), творческих способностей обучающихся в процессе решения олимпиадных математических задач.

Задачи:

– углубить и расширить знания обучающихся в области математики;

– способствовать развитию способности глубоко понимать математические законы и умения самостоятельно применять их в различных ситуациях;

– способствовать развитию интуиции, выработки определенной техники для быстрого улавливания содержания задачи;

– способствовать усвоению алгоритмов решения нестандартных математических задач;

– способствовать развитию навыка исследовательской работы;

– способствовать развитию навыка решения экспериментальных задач.

4. Ожидаемые результаты освоения программы/ модуля

Обучающиеся, освоившие программу, должны знать:

- содержание основных понятий и алгоритмов алгебры и геометрии;
- основные источники информации по олимпиадной математике и способы работы с ними;
- правила работы в группе;
- алгоритм работы над исследовательской задачей.

Обучающиеся, освоившие программу, должны уметь:

- формулировать проблему и цель деятельности;
- находить, анализировать, отбирать, структурировать информацию;
- решать олимпиадные задачи по математике разного вида и уровня сложности;
- выбирать рациональный способ решения задачи;
- сравнивать разные способы решения задачи;
- отбирать критерии оценивания результата деятельности.

Обучающиеся, освоившие программу, должны владеть навыками:

- самостоятельной математической и творческой деятельности по решению олимпиадных задач по математике;
- работы с информацией;

- группового взаимодействия;
- разработки и реализации математического исследования.

5. Учебный план

№ п/п	Наименование модулей и разделов	Всего часов	В том числе:		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	Модуль 1. Диофантовы уравнения.	24	4	20	Зачет
2.	Модуль 2. Неравенства.	24	10	14	Зачет
3.	Модуль 3. Геометрия.	24	8	16	Зачет
	ИТОГО	**72**	**22**	**50**	

6. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Всего часов	Количество часов		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	**Модуль 1. Диофантовы уравнения.**	**24**	**4**	**20**	
1.1.	Основные типы диофантовых уравнений и способы их решения.	4	2	2	
1.2.	Пифагоровы тройки чисел. Однородные квадратные уравнения с тремя переменными.	4		4	
1.3.	Цепные дроби и их использование в решении диофантовых уравнений. Уравнения Пелля.	6		6	
1.4.	Показательные диофантовы уравнения.	5		5	
1.5.	Великая теорема Ферма. Частные случаи и их решения.	4	2	2	
1.6.	Промежуточная аттестация.	1		1	Зачет
2.	**Модуль 2. Неравенства.**	**24**	**10**	**14**	
2.1.	Основные методы доказательства неравенств.	3	1	2	
2.2.	Неравенство о средних.	2	1	1	
2.3.	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.	2	1	1	
2.4.	Индукция в доказательстве неравенств.	2	1	1	
2.5.	Симметричные и однородные неравенства.	2	1	1	
2.6.	Циклические и круговые неравенства.	2	1	1	
2.7.	Иррациональные неравенства.	2	1	1	
2.8.	Транснеравенства.	3	1	2	
2.9.	Метод Штурма.	2	1	1	
2.10	Условные неравенства.	3	1	2	
2.11	Промежуточная аттестация.	1		1	Зачет
3.	**Модуль 3. Геометрия.**	**24**	**8**	**16**	
3.1.	Подобные треугольники.	2	1	1	
3.2.	Вписанный угол.	3	1	2	
3.3.	Окружности.	3	1	2	
3.4.	Площадь.	3	1	2	
3.5.	Треугольники.	3	1	2	
3.6.	Многоугольники.	3	1	2	
3.7.	Геометрические места точек.	3	1	2	

3.8.	Построения.	3	1	2	
3.9.	Промежуточная аттестация.	1		1	Зачет
	ИТОГО:	**72**	**22**	**50**	

7. Содержание дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

№ п/п	**Наименование модулей, разделов и тем**	**Содержание обучения**
	Модуль 1. Диофантовы уравнения.	
1.1.	Основные типы диофантовых уравнений и способы их решения.	Теория: Метод прямого перебора. Метод «спуска». Метод разложения на множители. Метод суммы квадратов. Метод оценки. Метод остатков. Практика: Использование параметра. Сравнение по модулю.
1.2.	Пифагоровы тройки чисел. Однородные квадратные уравнения с тремя переменными.	Практика: Получение формул для нахождения примитивных пифагоровых троек и их применение. Получение формул для решения однородных квадратных уравнений с тремя переменными.
1.3.	Цепные дроби и их использование в решении диофантовых уравнений. Уравнения Пелля.	Практика: Перевод рационального числа в цепную дробь. Использование цепных дробей в решении линейных уравнений с двумя неизвестными. Решение уравнения Пелля.
1.4.	Показательные диофантовы уравнения.	Практика: Использование свойств сравнений чисел по модулю в решении показательных уравнений.
1.5.	Великая теорема Ферма. Частные случаи и их решения.	Теория: История Великой теоремы Ферма. Практика: Решение её частных случаев для показателей 3, 4, 5.
	Модуль 2. Неравенства.	
2.1.	Основные методы доказательства неравенств.	Теория: Основные методы доказательства неравенств. Практика: Доказательство неравенств с использованием разложения на множители, выделения полных квадратов, разбиения, промежуточной оценки, подстановки, замены переменных, упорядочивания переменных.
2.2.	Неравенство о средних.	Теория: Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и неравенства между ними. Практика: Использование неравенства о средних степенных в доказательстве неравенств.
2.3.	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.	Теория: Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Практика: Доказательство неравенств с использованием неравенства Коши-Буняковского-Шварца и следствий из него.
2.4.	Индукция в доказательстве неравенств.	Теория: Индукция в доказательстве неравенств. Практика: Применение метода математической индукции в доказательстве неравенств.
2.5.	Симметричные и однородные неравенства.	Теория: Доказательство симметричных и однородных неравенств. Уменьшение количества переменных. Практика: Использование симметрической замены переменных.
2.6.	Циклические и круговые неравенства.	Теория: Доказательство циклических и круговых неравенств. Практика: Использование метода неопределённых коэффициентов и весового неравенства Коши.
2.7.	Иррациональные неравенства.	Теория: Иррациональные неравенства. Практика: Доказательство иррациональных неравенств с использованием устранения иррациональности, а также ранее изученных методов и известных неравенств.

2.8.	Транснеравенства.	Теория: Транснеравенства. Практика: Теоремы о перестановочных неравенствах (транснеравенствах) и их использование в доказательстве неравенств. Неравенство Чебышёва – классическое и обобщённое.
2.9.	Метод Штурма.	Теория: Метод Штурма. Практика: Использование «сдвигания» и «раздвигания» переменных с сохранением их суммы или произведения для доказательства неравенств.
2.10.	Условные неравенства.	Теория: Условные неравенства. Практика: Доказательство неравенств с дополнительными условиями на переменные.
Модуль 3. Геометрия.		
3.1.	Подобные треугольники.	Теория: Отрезки, заключённые между параллельными прямыми. Отношение сторон подобных треугольников. Отношение площадей подобных треугольников. Треугольник, образованный основаниями высот. Подобные фигуры. Практика: Решение задач.
3.2.	Вписанный угол.	Теория: Углы, опирающиеся на равные дуги. Величина угла между двумя хордами. Угол между касательной и хордой. Практика: Связь величины угла с длиной дуги и хорды. Четыре точки, лежащие на одной окружности. Вписанный угол и подобные треугольники. Биссектриса делит дугу пополам. Точка Микеля.
3.3.	Окружности.	Теория: Касательные к окружностям. Произведение длин отрезков хорд. Касающиеся окружности. Две касательные, проведённые из одной точки. Практика: Применение теоремы о высотах треугольника. Радикальная ось.
3.4.	Площадь.	Теория: Медиана делит площадь пополам. Площади треугольников, на которые разбит четырёхугольник. Прямые, делящие фигуры на равновеликие части. Практика: Вычисление площадей. Формулы для площади четырёхугольника. Перегруппировка площадей.
3.5.	Треугольники.	Теория: Вписанная и описанная окружности. Прямоугольные треугольники. Правильный треугольник. Теоремы Менелая и Чевы. Прямая Симсона. Подерный треугольник. Прямая Эйлера и окружность девяти точек. Точки Брокара и Лемуана.
3.6.	Многоугольники.	Теория: Вписанные и описанные четырёхугольники. Теорема Птолемея. Пятиугольники. Шестиугольники. Правильные многоугольники. Вписанные и описанные многоугольники. Практика: Теорема Паскаля.
3.7.	Геометрические места точек.	Теория: Геометрические места точек (ГМТ) – прямая или отрезок. ГМТ – окружность или дуга окружности. Вписанный угол. Гомотетия. Теорема Карно. Окружность Ферма-Аполлония. Практика: Решение задач.
3.8.	Построения.	Теория: Метод геометрических мест точек. Вписанный угол. Подобные треугольники и гомотетия. Практика: Построение треугольников по различным элементам. Построение треугольников по различным точкам. Окружность Аполлония. Построения одной линейкой.

8. Материально-техническое обеспечение дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

Программа реализуется с использованием мультимедийного оборудования, физического демонстрационного и лабораторного оборудования, наглядных пособий и дидактических материалов.

Рекомендуемая литература:

Интернет-ресурсы:

1. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – URL: http://kvant.mccme.ru/.
2. Больше, чем онлайн-математика: Сообщество творческого решения проблем – URL: https://artofproblemsolving.com/online.
3. 15 лайфхаков от призера всероса по математике – URL: https://olimpiada.ru/.
4. Всероссийская олимпиада по математике. Задания – URL: https://olimpiada.ru/activity/72/tasks (дата обращения: 31.08.2023).

Литература:

1. Агаханов, Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009. Задачи и решения. Заключительные этапы. Классический сборник задач повышенной сложности / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский, П. А. Кожевников [и др.] ; под ред. Н. Х. Агаханова. – Москва : МЦНМО, 2020 – 552 с.
2. Агаханов, Н. Х. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2019. – 395 с.
3. Кохась, К. П. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2017 года / К. П. Кохась, С. Л. Берлов, Ф. В. Петров [и др.]. – Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2018. – 159 с.
4. Акопян, А. В. Геометрия в картинках / А. В. Акопян – Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2018. – 236 с.
5. Мельников, О. И. Теория графов в занимательных задачах О. И. – Москва : Книжный дом «Либроком, 2009. 232 с.

9. Методические рекомендации по организации образовательного процесса

Основные формы организации обучения: проведение теоретических (проблемных и традиционных); практических занятий (коллективные формы обсуждения, круглые столы, мозговые штурмы, работа в микрогруппах – решение проблемных ситуаций, моделирование, защита решений), различные формы самостоятельной работы обучающихся, консультации и т.д.

Для более эффективного освоения обучающимися программы целесообразно использовать такие методы как, погружение (индивидуальная работа ученика при поиске возможного решения поставленной задачи), обмен опытом (работа в малых группах (2 чел.), обмен и критика возникших идей), мозговой штурм (обсуждение решений группой из 4–5 человек), подсказка (беглое знакомство с авторским решением, с последующим самостоятельным решением), консультации (консультация у старших и более опытных товарищей).

10. Формы учебной работы

Фронтальная, индивидуальная и групповая работа.

11. Формы контроля

11.1. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Текущий контроль успеваемости осуществляется на основе наблюдений за деятельностью обучающихся в ходе занятий.

Промежуточная аттестация проводится по итогам освоения каждого модуля в форме зачёта в виде проверочных работ – олимпиадные задания прошлых лет.

Критерии оценивания проверочных работ

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты (не логические), в целом не влияющие на решение.
4-5	Решение в целом верное, однако, содержит существенные недочёты (не разобраны важные случаи, имеются недостаточно обоснованные утверждения).
2-3	Задача не решена или решена с ошибками, но имеются обоснованные верные утверждения, важные для решения задачи.
1	Задача не решена, но в решении имеется верный пример, отвечающий на вопрос задачи.
0	Решение неверное или отсутствует.

За каждую работу можно получить до 21 балла.

Баллы	Оценка
1–21 балл	Зачтено
10 и менее	Не зачтено

Задачи для проверочных работ.

Модуль 1. Диофантовы уравнения.

Проверочная работа 1

1. Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие равенству $5^{x^2} - 7y = 2019$.

Ответ: таких чисел нет.

Решение. Остаток от деления числа 2019 на 7 равен 3, следовательно, остаток от деления 5^{x^2} на 7 также равен 3. Рассмотрим остатки от деления степеней числа 5 на 7, составив следующую таблицу:

5^n	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6
Остаток от деления 5^n на 7	5	4	6	2	3	1

Отсюда получаем следующую таблицу для любого целого неотрицательного k:

5^n	5^{6k+1}	5^{6k+2}	5^{6k+3}	5^{6k+4}	5^{6k+5}	5^{6k}
Остаток от деления 5^n на 7	5	4	6	2	3	1

Следовательно $x^2 = 6k + 5$ для некоторого целого неотрицательного k. Квадрат целого числа при делении на 3 может давать в остатке 0 или 1, а правая часть равенства даёт остаток 2 при делении на 3, получаем противоречие. Таким образом, исходное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Замечание. Тот факт, что квадрат натурального числа при делении на 3 даёт в остатке 0 или 1, при проверке считается общеизвестным и не требует доказательства.

---

2. Найдите все пары натуральных чисел a и n, удовлетворяющих равенству $7a^2 - 2^n = 2019$.

Ответ: $a = 17, n = 2$.

Решение. Если $n = 1$, то a – иррациональное. Если $n = 2$, то $a = 17$. Пусть $n \geq 3$. Тогда 2^n кратно 8. Правая часть равенства нечётна, следовательно, a тоже нечётно. Квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1, следовательно, $7a^2 - 2^n$ при делении на 8 даёт остаток 7. Число 2019 при делении на 8 даёт остаток 3, получаем противоречие. Следовательно, уравнение имеет единственное решение в натуральных числах.

Замечание. Тот факт, что квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1, при проверке считается общеизвестным и не требует доказательства.

---

3. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых верно равенство

$m(5n + 11) = 2021(n + 1)$.

Ответ: $(m, n) \in \{(376{,}15), (387{,}26), (403{,}402), (404{,}2423)\}$.

Решение. Найдём все возможные значения наибольшего общего делителя (НОД) чисел $5n + 11$ и $n + 1$. Если $d = \text{НОД}(5n + 11, n + 1)$, то $5n + 11 \mathrel{\vdots} d$ и $n + 1 \mathrel{\vdots} d$, следовательно,
$5n + 5 = 5(n + 1) \mathrel{\vdots} d$, тогда $6 = \big((5n + 11) - (5n + 5)\big) \mathrel{\vdots} d$, следовательно, $d \in \{1{,}2{,}3{,}6\}$.

Пусть $5n + 11 = ad$, $n + 1 = bd$ ($a, b \in \mathbb{N}$), тогда $\text{НОД}(a, b) = 1$ и исходное равенство запишется в следующем виде: $mda = 2021db$, то есть

$$2021b = ma. \qquad (1)$$

Отсюда получаем, что $2021b \mathrel{\vdots} a$, но так как $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $2021 \mathrel{\vdots} a$. Число 2021 представимо в виде $43 \cdot 47$, причём оба множителя – простые, поэтому $a \in \{1{,}43{,}47{,}2021\}$. Рассмотрим все 4 случая.

1) $a = 1$, тогда $5n + 11 = ad = d$, следовательно, $n + 1 = bd \geq d = 5n + 11$, получаем противоречие, так как $n + 1 < 5n + 11$.

2) $a = 43$, тогда из равенства (1) получаем $m = 47b$, а из равенства $5n + 11 = ad$ имеем $n = \frac{43d - 11}{5}$. Так как при $d \in \{1{,}3{,}6\}$ число $43d - 11$ не кратно 5, то подходит только $d = 2$. При этом
$n = \frac{43 \cdot 2 - 11}{5} = 15$, $b = \frac{n+1}{d} = \frac{16}{2} = 8$, $m = 47b = 47 \cdot 8 = 376$.

3) $a = 47$, тогда из равенства (1) получаем $m = 43b$, а из равенства $5n + 11 = ad$ имеем $n = \frac{47d - 11}{5}$. Так как при $d \in \{1{,}2{,}6\}$ число $47d - 11$ не кратно 5, то подходит только $d = 3$. При этом
$n = \frac{47 \cdot 3 - 11}{5} = 26$, $b = \frac{n+1}{d} = \frac{27}{3} = 9$, $m = 43b = 43 \cdot 9 = 387$.

4) $a = 2021$, тогда из равенства (1) получаем $m = b$, а из равенства $5n + 11 = ad$ имеем $n = \frac{2021d - 11}{5}$. Так как при $d \in \{2{,}3\}$ число $2021d - 11$ не кратно 5, то подходит только $d = 1$ и $d = 6$.

4а) При $d = 1$ имеем $n = \frac{2021 - 11}{5} = 402$, $b = \frac{n+1}{d} = \frac{403}{1} = 403$, $m = b = 403$.

4б) При $d = 6$ имеем $n = \frac{2021 \cdot 6 - 11}{5} = 2423$, $b = \frac{n+1}{d} = \frac{2424}{6} = 404$, $m = b = 404$.

Итого, получаем 4 пары (m, n): $(376{,}15), (387{,}26), (403{,}402), (404{,}2423)$.

Модуль 2. Неравенства.

Проверочная работа 2

1. Докажите неравенство $\frac{1}{1+x-y}+\frac{1}{1-x+y}\geq\frac{2}{3-x-y}$ для всех $x,y\in(0;1]$.

Решение. 1-й способ. Из условия следует, что все знаменатели положительны. Умножим обе части неравенства на произведение этих знаменателей, получим

$$((1-x+y)+(1+x-y))(3-x-y)\geq 2(1+x-y)(1-x+y),$$

т. е. $2(3-x-y)\geq 2(1-(x-y)^2)$, а это равносильно неравенству $(2-x-y)+(x-y)^2\geq 0$. Последнее неравенство верное, поскольку первое слагаемое неотрицательно в силу того, что $x,y\leq 1$, а второе слагаемое является квадратом действительного числа. Исходное неравенство доказано.

2-й способ. Из известного неравенства $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$, которое верно для всех положительных a и b, следует, что $\frac{1}{1+x-y}+\frac{1}{1-x+y}\geq\frac{4}{2}=2$. Теперь осталось доказать, что $2\geq\frac{2}{3-x-y}$, а это следует из того, что $3-x-y\geq 1$.

---

2. Докажите неравенство

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)\geq(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy),$$

где $x,y,z\geq 0$.

Решение. Докажем неравенство

$$(y^2+z^2)(z^2+x^2)\geq(z^2+xy)^2. \qquad (*)$$

Раскрыв скобки в обеих частях, получим равносильное неравенство

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+z^4\geq z^4+2xyz^2+x^2y^2,$$

т.е. $x^2z^2-2xyz^2+y^2z^2\geq 0$. Последнее неравенство верно, так как

$$x^2z^2-2xyz^2+y^2z^2=z^2(x-y)^2\geq 0.$$

Аналогично получаем неравенства

$$(z^2+x^2)(x^2+y^2)\geq(x^2+yz)^2 \text{ и } (x^2+y^2)(y^2+z^2)\geq(y^2+zx)^2.$$

Перемножив два последних неравенства с неравенством (*), после извлечения корня из обеих частей получим нужное неравенство.

---

3. Положительные числа x, y удовлетворяют неравенству $(x^2+y^2)(x-y+1)\geq y$. Докажите, что $x(x+y)\geq y$.

Решение. Так как $x^2+y^2>0$ и $y>0$, то $x-y+1>0$. Предположим, что утверждение задачи не верно, т.е. $x(x+y)<y$, что равносильно $x^2<y-xy$. Тогда

$$(x^2+y^2)(x-y+1)<(y-xy+y^2)(x-y+1)=y(1-x+y)(x-y+1)=$$
$$=y\big(1-(x-y)\big)\big(1+(x-y)\big)=y(1-(x-y)^2)=y-y(x-y)^2.$$

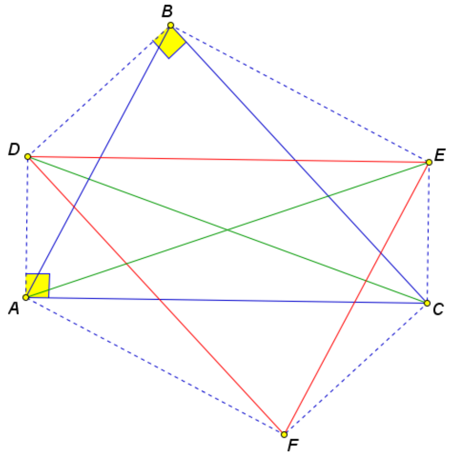
Так как по условию $(x^2+y^2)(x-y+1)\geq y$, то $y-y(x-y)^2>y$, что равносильно $y(x-y)^2<0$, что невозможно, так как $y>0$ и $(x-y)^2\geq 0$.

Модуль 3. Геометрия.

Проверочная работа 3

1. В остроугольном треугольнике ABC через каждую вершину проведены перпендикуляры к исходящим из этой вершины сторонам. Получившиеся 6 прямых, пересекаясь, образуют выпуклый шестиугольник $ADBECF$. Докажите, что треугольники ABC и EFD равны.

Решение. Докажем, что $DE = AC$. Так как $\angle DBC = \angle DAC = 90°$, то четырёхугольник $ADBC$ вписанный, т.е. точки A, D, B, C лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что точки E и F лежат на той же окружности. Следовательно, получившийся шестиугольник – вписанный. Вписанные прямые углы $\angle CAD$ и $\angle ACE$ опираются на диаметр, следовательно, AE и DC – диаметры окружности, описанной около $ADBECF$, поэтому $\angle ADE = \angle DEC = 90°$, т.е. $ADEC$ – прямоугольник и поэтому $AC = DE$. Аналогично доказывается, что $BC = DF$ и $AB = EF$, следовательно, треугольники ABC и EFD равны.

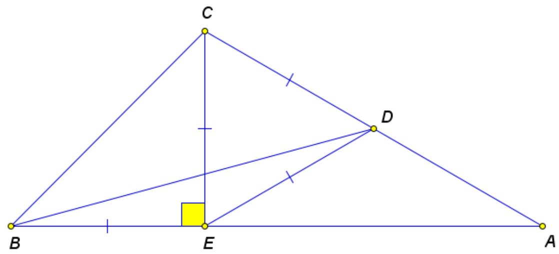


---

2. В треугольнике ABC с углами A и B, равными $30°$ и $45°$ соответственно, проведена медиана BD. Найдите величину угла BDC.

Ответ: $45°$.

Решение. Опустим перпендикуляр CE к AB. Треугольник BCE – прямоугольный и равнобедренный, значит, $EC = EB$. Поскольку в прямоугольном треугольнике AEC напротив угла в $30°$ лежит катет, равный половине гипотенузы, то $EC = DC$; а так как медиана ED также равна половине гипотенузы, то $ED = EC = DA = DC$. Отсюда получаем, что треугольник BED – равнобедренный, $\angle BED = 90° + 60° = 150°$, следовательно, $\angle BDE = 15°$, поэтому $\angle BDC = \angle CDE - \angle BDE = 60° - 15° = 45°$.



---

3. На окружности ω выбрана точка A. Окружность ω_1 с центром в точке A пересекает окружность ω в точках B и C (радиус окружности ω_1 меньше радиуса окружности ω). Окружность ω_2 с центром в точке C пересекает окружность ω в точках B и D. Пусть E – ещё одна точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что точки A, D и E лежат на одной прямой.

Решение. Пусть $\angle BDA = \alpha$. Так как $AB = AC$, то дуги *AB* и *AC* окружности ω равны, следовательно, на них опираются равные вписанные углы. Поэтому $\angle ADC = \angle BDA = \alpha$, следовательно,
$\angle BDC = \angle ADC + \angle BDA = 2\alpha$. Так как $BC = CD$, то $\angle CBD = \angle BDC = 2\alpha$. Углы $\angle DBC$ и $\angle DAC$ являются вписанными в окружность ω и опираются на одну дугу *CD*, следовательно,
$\angle DAC = \angle DBC = 2\alpha$. Равнобедренные треугольники *ABC* и *AEC* равны по трём сторонам, следовательно, $\angle ACE = \angle AEC = \angle ABC = \angle ADC = \alpha$ (углы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ вписаны в окружность ω и опираются на одну дугу AC). Тогда $\angle CAE = 180° - 2\angle AEC = 180° - 2\alpha$ и $\angle EAD = \angle CAE + \angle DAC = 180° - 2\alpha + 2\alpha = 180°$, следовательно, точки *A*, *D* и *E* лежат на одной прямой.