

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный педагогический университет»
(ТГПУ)**



УТВЕРЖДАЮ
Директор ЦФМиЕНО
Червоный М.А.

«30» января 2023 г.

М.П.

Центр дополнительного физико-математического и естественнонаучного образования

**Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа
«Подготовка к ОГЭ по математике»**

Автор программы
Подстригич А.Г.,
доцент кафедры развития
математического образования,
к.п.н.

Томск 2023 г.

Содержание

1. Паспорт программы
2. Актуальность программы
3. Цели и задачи
4. Ожидаемые результаты освоения программы/модуля
5. Учебный план
6. Учебно-тематический план
7. Содержание дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы
8. Материально-техническое обеспечение дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы
9. Методические рекомендации по организации образовательного процесса
10. Формы учебной работы
11. Формы контроля
- 11.1. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

1. Паспорт программы

Аннотация программы	Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Подготовка к ОГЭ по математике» направлена на подготовку обучающихся к Государственной итоговой аттестации в новой форме обязательного государственного экзамена (далее – ОГЭ) в 9 классе, а также на повышение уровня их математической подготовки, развитие у обучающихся творческих способностей при решении конкурсных задач более сложного уровня. Программа состоит из 7 модулей. Обучающийся вправе освоить как все модули, так и один или несколько модулей в соответствии со своими образовательными потребностями.
Направленность дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Естественнонаучная
Вид деятельности дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы	Математика
Категория обучающихся	9 класс (15-16 лет)
Срок обучения	72 часа ¹
Форма обучения	Очная
Режим занятий	2 ак. часа в неделю
Ожидаемое минимальное и максимальное число обучающихся в одной группе	7-15
Категория состояния здоровья обучающихся, которые могут быть зачислены на обучение по дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программе	Без детей ОВЗ

2. Актуальность программы

Актуальность программы «Подготовка к ОГЭ по математике» обусловлена его практической значимостью. Обучающиеся могут применить полученные знания и практический опыт при сдаче ОГЭ, а в дальнейшем ЕГЭ. Данный курс так же поможет научить школьника технике работы с тестовыми заданиями и сдаче ОГЭ.

Программой школьного курса математики не предусмотрены обобщение и систематизация знаний по различным разделам, полученных учащимися за весь период обучения с 5 по 9 класс. Программа позволит систематизировать и углубить знания учащихся по различным разделам курса математики основной школы (арифметике, алгебре, статистике и теории вероятностей, геометрии). В данном курсе также рассматриваются нестандартные задания, выходящие за рамки школьной программы (графики с модулем, кусочно-заданные функции, решение нестандартных уравнений и

¹ Обучающийся, родитель (законный представитель) несовершеннолетнего обучающегося вправе выбрать из общего количества часов по дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программе «Подготовка к ОГЭ по математике» любое количество часов, но не более 72 часов.

неравенств и др.). Знание этого материала и умение его применять в практической деятельности позволит школьникам решать разнообразные задачи различной сложности и подготовиться к успешной сдаче экзамена в новой форме итоговой аттестации.

3. Цели и задачи

Организационно-педагогической целью образовательной программы «Подготовка к ОГЭ по математике» является создание условий, позволяющих подготовить учащихся к успешной сдаче итогового экзамена по математике за курс основного общего образования.

Дидактическая цель программы – содействовать развитию познавательных интересов, интеллектуальных и творческих способностей обучающихся в процессе решения математических задач, расширение математического кругозора, совершенствование условий решать математические задачи.

Задачи:

- повторить и систематизировать знания обучающихся в области математики;
- закрепить алгоритмы решения математических задач;
- совершенствовать умения применять основные методы решения задач;
- изучить новые методы решения задач повышенной сложности;
- способствовать развитию интереса школьников к предмету математика.

4. Ожидаемые результаты освоения программы

- расширение знаний об основных алгоритмах решения задач, различных методах и приемах решения задач;
- развитие познавательных интересов, интеллектуальных и творческих способностей на основе опыта самостоятельного решения задач разного вида, анализа и оценки новой информации;
- сознательное самоопределение ученика относительно профиля дальнейшего обучения или профессиональной деятельности;
- успешность написания ОГЭ по математике.

Обучающиеся, освоившие программу, должны знать:

- основные математические формулы, используемые в алгебраических задачах;
- основные формулы и теоремы планиметрии;
- сущность алгоритмического подхода в решении задач.

Обучающиеся, освоившие программу, должны уметь:

- проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени и радикалы;
- решать рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, а также системы уравнений и неравенств;
- создавать математические модели;
- решать задачи с практическим содержанием;
- решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических и алгебраических величин, применяя изученные математические формулы, уравнения и неравенства;
- решать планиметрические задачи;
- решать задания, по типу приближенному к заданиям ОГЭ.

Обучающиеся, освоившие программу, должны владеть навыками:

- самостоятельной математической и творческой деятельности по решению задач ОГЭ по математике;
- работы с информацией;
- группового взаимодействия;
- разработки и реализации математического исследования.

5. Учебный план

№ п/п	Наименование модулей и разделов	Всего часов	В том числе:		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	Модуль 1. Делимость чисел	4	1	3	Зачет
2.	Модуль 2. Декартовы координаты. Векторы на плоскости	4	1	3	Зачет
3.	Модуль 3. Числовые функции и последовательности	10	3	7	Зачет
4.	Модуль 4. Многочлены	10	4	6	Зачет
5.	Модуль 5. Уравнения и неравенства	12	3	9	Зачет
6.	Модуль 6. Геометрические фигуры и их свойства	16	3	13	Зачет
7.	Модуль 7. Практическая математика. Статистика и теория вероятностей	16	4	12	Зачет
	ИТОГО	72	19	53	

6. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Всего часов	В том числе:		Формы контроля
			Теория	Практика	
1.	Модуль 1. Делимость чисел	4	1	3	
1.1.	Признаки делимости. Наибольший общий делитель	2	1	1	
1.2.	Числовые выражения	1	0	1	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
2.	Модуль 2. Декартовы координаты. Векторы на плоскости	4	1	3	
2.1.	Координаты и графики	2	1	1	
2.2.	Операции над векторами	1	0	1	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
3.	Модуль 3. Числовые функции и последовательности	10	3	7	
3.1.	Свойства функции	6	2	4	
3.2.	Арифметическая и геометрическая прогрессии	3	1	2	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
4.	Модуль 4. Многочлены	10	4	6	
4.1.	Разложение многочлена на множители	5	2	3	
4.2.	Преобразование выражений	4	2	2	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт

5.	Модуль 5. Уравнения и неравенства	12	3	9	
5.1.	Методы решения уравнений и неравенств	3	1	2	
5.2.	Уравнения и неравенства с параметром	4	1	3	
5.3.	Системы уравнений и неравенств	4	1	3	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
6.	Модуль 6. Геометрические фигуры и их свойства	16	3	13	
6.1.	Геометрия на клетчатой бумаге	3	1	2	
6.2.	Площади фигур	6	1	5	
6.3.	Задачи на построение	6	1	5	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
7.	Модуль 7. Практическая математика. Статистика и теория вероятностей	16	4	12	
7.1.	Текстовые задачи	8	2	6	
7.2.	Элементы комбинаторики и теории вероятностей	7	2	5	
	Промежуточная аттестация	1	0	1	Зачёт
	ИТОГО	72	19	53	

7. Содержание дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Содержание обучения
Модуль 1. Делимость чисел		
1.1.	Признаки делимости. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное	Теория: десятичная система счисления. Делимость натуральных чисел. Практика: простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. Нахождение наибольшего общего делителя (далее – НОД) и наименьшего общего кратного (далее – НОК). Деление с остатком.
1.2.	Числовые выражения	Теория: модуль (абсолютная величина) числа. Практика: сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок. Законы арифметических действий. Понятие об иррациональном числе. Сравнение действительных чисел. Проценты. Пропорции. Округление чисел.
Модуль 2. Декартовы координаты. Векторы на плоскости		
2.1.	Координаты и графики	Теория: геометрический смысл модуля.

		Практика: решение задач геометрического содержания на координатной плоскости с использованием алгебраического метода и с опорой на графические представления. Прочтение графиков и диаграмм. Составление уравнений прямых и парабол по заданным условиям. Построение графиков с двумя переменными.
2.2.	Операции над векторами	Теория: вектор, длина (модуль) вектора. Практика: операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число). Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.
Модуль 3. Числовые функции и последовательности		
3.1.	Свойства функции	Теория: построение графиков изученных функций, их исследование. Практика: построение более сложных графиков функций (кусочно-заданных, с «выколотыми» точками и т.п.).
3.2.	Арифметическая и геометрическая прогрессии	Теория: понятие числовых последовательностей. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Практика: решение задач с применением формул n -го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Сложные проценты.
Модуль 4. Многочлены		
4.1.	Разложение многочлена на множители	Теория: понятие многочлена. Практика: сложение, вычитание, умножение многочленов. Разложение многочленов на множители с использованием нескольких способов.
4.2.	Преобразование выражений	Теория: способы преобразования выражений. Практика: многошаговые преобразования целых и дробных выражений (применяя широкий набор изученных алгоритмов). Действия с алгебраическими дробями. Рациональные выражения и их преобразования.
Модуль 5. Уравнения и неравенства		
5.1.	Методы решения уравнений и неравенств	Теория: виды уравнений. Практика: решение систем линейных уравнений и систем, содержащих нелинейные уравнения, способами подстановки и сложения. Решение линейных неравенств с одной переменной и их систем, требующих алгебраических преобразований. Решение квадратных неравенств и систем, включающих квадратные неравенства.
5.2.	Уравнения и неравенства с параметром	Теория: приемы и техники решения уравнений и неравенств с параметром. Практика: решение задач, связанных с исследованием неравенств и систем, содержащих буквенные коэффициенты.
5.3.	Системы уравнений и неравенств	Теория: уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными.

		Практика: система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и алгебраическим сложением. Решение простейших нелинейных систем.
Модуль 6. Геометрические фигуры и их свойства		
6.1.	Геометрия на клетчатой бумаге	Теория: основные понятия, символика. Практика: способы оформления решения геометрических задач.
6.2.	Площади фигур	Теория: формулы вычисления площадей фигур. Практика: решение задач.
6.3.	Задачи на построение	Теория: задачи на построение Практика: решение задач на построение.
Модуль 7. Практическая математика. Статистика и теория вероятностей		
7.1.	Текстовые задачи	Теория: текстовые задачи Практика: решение задач арифметическими способами рассуждений, алгебраическим методом (составление выражений, уравнений, систем).
7.2.	Элементы комбинаторики и теории вероятностей	Теория: знакомство со спецификой комбинаторных и вероятностных задач. Практика: решение задач.

8. Материально-техническое обеспечение дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы

Для обеспечения программы необходимы: аудиторный фонд, мультимедийный комплекс, USB-модем, флеш-карта, видеоматериал, наглядные пособия, дидактический материал.

Рекомендуемая литература:

1. Балаян, Э. Н. Комплексные упражнения по математике для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам (с решениями). 7–11 классы / Э. Н. Балаян. – Москва : Феникс, 2016. – 224 с.
2. Балаян, Э. Н. Математика. Справочник для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ / Э. Н. Балаян. – Москва : Высшая школа, 2015. – 320 с.
3. Балаян, Э. Н. Математика. Справочное пособие для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ / Э. Н. Балаян. – Москва : Огни, 2015. – 304 с.
4. Балаян, Э. Н. Новые олимпиадные задачи по математике для подготовки к ГИА и ЕГЭ. 5-11 классы / Э.Н. Балаян. – Москва : Наука, 2015. – 320 с.

9. Методические рекомендации по организации образовательного процесса

Основные формы организации обучения: проведение лекций (проблемных и традиционных); практических занятий (коллективные формы обсуждения, круглые столы, мозговые штурмы, работа в микрогруппах – решение проблемных ситуаций, моделирование, защита решений), различные формы самостоятельной работы, промежуточные аттестации обучающихся, консультации и т.д.

Самостоятельная работа обучающихся предполагает различные формы индивидуальной учебной деятельности: конспектирование научной и учебно-методической литературы, сбор и анализ практического материала, ведение словаря, проектирование, выполнение тематических исследовательских заданий и пр. Выбор форм и видов самостоятельной работы определяются индивидуально-личностным и компетентностным подходом к обучению совместно преподавателем и обучающимся.

10. Формы учебной работы

Фронтальная, индивидуальная и групповая работа.

11. Формы контроля

11.1. Формы текущего контроля успеваемости промежуточной аттестации

Текущий контроль успеваемости осуществляется на занятиях на основе наблюдений за деятельностью учащихся в ходе занятий.

Промежуточной аттестацией по итогам освоения каждого модуля является зачёт в форме тестирования, где учащимся предлагается ответить на вопросы теста, проверочной работы (решение тренировочных заданий ОГЭ).

Примерные вопросы теста по модулю «Делимость чисел»:

Вопрос 1. Какие числа делятся на 3?

- А) Все числа, оканчивающиеся цифрой 3;
- Б) Все числа, сумма цифр которого делится на 3;
- В) Все числа, оканчивающиеся на 3, 6 или 9;
- Г) Все числа, оканчивающиеся нечетной цифрой.

Вопрос 2. Выберите ряд, в котором все числа делятся на 5:

- А) 25360, 215, 9845, 67351;
- Б) 34795, 54540, 12345, 214;
- В) 1295, 360, 84965, 2225;
- Г) 3451, 39798, 948, 680.

Вопрос 3. Какие цифры можно подставить в число *8658 вместо*, чтобы полученное число делилось на 9?

- А) 0 и 9;
- Б) 0;
- В) 9;
- Г) нет верного ответа.

Вопрос 4. Какое число является НОК чисел 8, 12 и 6?

- А) 24;
- Б) 576;
- В) 48;
- Г) 2.

Вопрос 5. Какие числа являются взаимно простыми?

- А) 5 и 25;
- Б) 9 и 99;
- В) 81 и 13;
- Г) 12 и 16.

Критерии оценивания:

- 85 - 100 % правильных ответов – высокий уровень;
- 70 - 84% правильных ответов – повышенный уровень;
- 50 - 69% правильных ответов – средний уровень;
- менее 50 % правильных ответов – низкий уровень.

Высокий, повышенный и средний уровень прохождения теста свидетельствуют об освоении материала программы.

Пример проверочной работы в формате ОГЭ.

1. Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на схеме. Заполните таблицу, в ответ запишите последовательность четырех цифр.

Решение. Сторона одной клетки равна 1 м. Значит, площадь коридора равна:

$$3 \cdot 6 + 7 \cdot 1 = 25_{\text{м}^2}.$$

Ответ: 25

4. Найдите расстояние d между противоположными углами детской комнаты в метрах. В ответ запишите $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

Решение. Найдем расстояние d между противоположными углами детской комнаты по теореме Пифагора:

$$\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4.$$

Таким образом, получаем ответ:

Ответ: 4

5. Хозяин квартиры планирует установить в квартире плиту для готовки. Он рассматривает два варианта: газовая плита или электроплитка. Цены на плиты, данные о потреблении и тарифах оплаты даны в таблице.

	Цена	Сред. расход газа / сред. потребл. мощность	Стоимость газа /электро-энергии
Газовая плита	44 680 руб.	1,4 куб. м/ч	6 руб./куб. м
Электроплитка	21 000 руб.	5,8 кВт	4 руб./(кВт · ч)

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовую плиту. Через сколько часов непрерывного использования экономия от использования газовой плиты вместо электрической компенсирует разность в стоимости установки газовой плиты и электроплитки?

Решение. Разница в стоимости покупки газовой плиты и электроплитки равна $44\,680 - 21\,000 = 23\,680$ руб. Час использования газовой плиты стоит $1,4 \cdot 6 = 8,4$ руб. Час использования электроплитки стоит $5,8 \cdot 4 = 23,2$ руб. Разница в стоимости составляет $23,2 - 8,4 = 14,8$ руб. Значит, экономия от использования газовой плиты вместо электроплитки компенсирует разность в стоимости установки газовой и электрической плит через

$$\frac{23680}{14,8} = 1600 \text{ часов.}$$

Ответ: 1600

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{14}$$

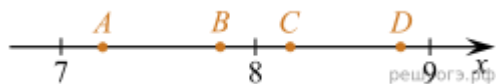
6. Найдите значение выражения $\frac{5}{6} - \frac{3}{14}$. Представьте результат в виде несократимой обыкновенной дроби. В ответ запишите числитель этой дроби.

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{14} = \frac{5 \cdot 7 - 3 \cdot 3}{14 \cdot 3} = \frac{26}{14 \cdot 3} = \frac{13}{21}.$$

Ответ: 13

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$.



Какая это точка?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) точка A
- 2) точка B
- 3) точка C
- 4) точка D

Решение. Возведем в квадрат числа $\sqrt{77}$, 7, 8, 9:

$$\sqrt{77}^2 = 77, \quad 7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81.$$

Число 77 лежит между числами 64 и 81 и находится ближе к числу 81, поэтому $\sqrt{77}$ соответствует точке D .

Правильный ответ указан под номером 4.

Ответ: 4

8. Найдите значение выражения $5\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{22}$.

Решение. Упростим выражение, разложив подкоренные выражения на множители и вынесем за знак корня полные квадраты чисел:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{22} &= 5 \cdot \sqrt{11} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 11} = \\ &= 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 220. \end{aligned}$$

Ответ: 220

9. Решите уравнение $3x + 5 + (x + 5) = (1 - x) + 4$.

Решение. Последовательно получаем:

$$3x + 5 + (x + 5) = (1 - x) + 4 \Leftrightarrow 3x + x + x = 1 + 4 - 5 - 5 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: -1

10. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 15 до 29 делится на 5?

Решение. Чисел от 15 до 29 — 15 штук. Среди них на 5 делится только 3 числа. Таким образом, вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 15 до 29 делится на 5 равна

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

Примечание.

Фраза от « M до N » подразумевает, что и M , и N включаются в диапазон. Количество чисел в указанном диапазоне можно найти по формуле $N - M + 1$. Фраза «число делится на k » подразумевает, что число делится на k без остатка. Такие соглашения используются в сборниках для подготовки к экзаменам во всех задачах подобного типа.

Ответ: 0,2

11. Установите соответствие между функциями и их графиками.

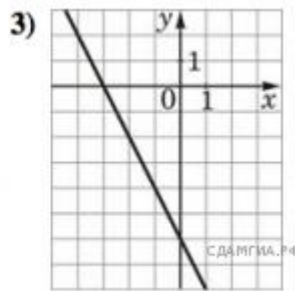
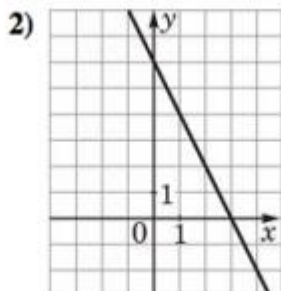
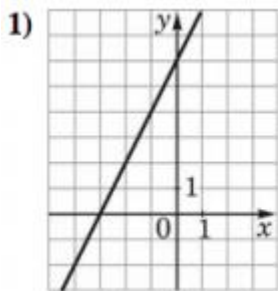
ФУНКЦИИ

А) $y = 2x + 6$

Б) $y = -2x - 6$

В) $y = -2x + 6$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А Б В

Решение. Напомним, что если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то: при $k > 0$, тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс положителен.

Уравнение $y = 2x + 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке 6. Ее график изображен на рисунке 1).

Уравнение $y = -2x - 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке -6. Ее график изображен на рисунке 3).

Уравнение $y = -2x + 6$ задает прямую, которая пересекает ось ординат в точке 6. Ее график изображен на рисунке 2).

Тем самым, искомое соответствие: А — 1, Б — 3, В — 2.

Ответ: 132

12. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6000 + 4100 \cdot n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 5 колец.

Решение. Подставим в формулу значение переменной n :

$$C = 6000 + 4100 \cdot 5 = 26500.$$

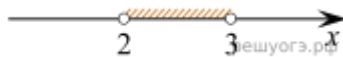
Ответ: 26500

13. Решите неравенство: $\frac{x-2}{3-x} \geq 0$

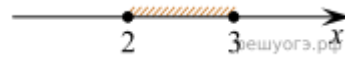
На каком из рисунков изображено множество его решений?

В ответе укажите номер правильного варианта.

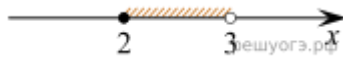
1)



2)



3)

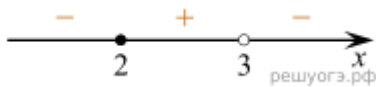


4)



Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x-2}{3-x} \geq 0.$$



Получаем $x \in [2; 3)$.

Правильный ответ указан под номером 3.

Ответ: 3

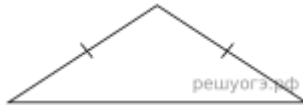
14. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение. Пусть бригада в первый день покрасила a_1 метров забора, во второй — a_2, \dots , в последний — a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за n дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 30n \text{ метров забора.}$$

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240 \Leftrightarrow n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8

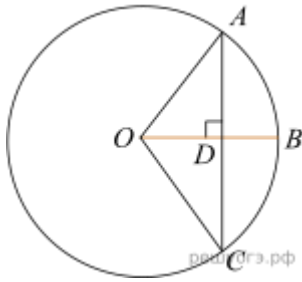
15.  Площадь равнобедренного треугольника равна $196\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания равен 120° . Найдите длину боковой стороны.

Решение. Пусть длина боковой стороны равна a . Площадь треугольника можно найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 120^\circ \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2S}{\sin 120^\circ}},$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 196\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2 \cdot 14 = 28.$$

Ответ: 28



16. Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC , если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.

Решение. Найдём отрезок DO : $DO = OB - BD = 5 - 1 = 4$. Так как OB перпендикулярен AC , треугольник AOD — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем:

$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Треугольник AOC — равнобедренный так как $AO = OC = r$, тогда $AD = DC$. Таким образом, $AC = AD \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6

17. Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 6π , угол сектора равен 120° , а радиус круга равен 9. В ответе укажите площадь, деленную на π .

$$S = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha,$$

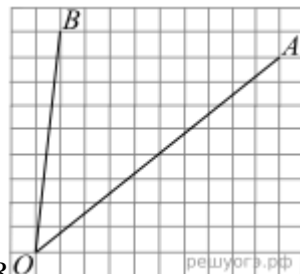
имеем:

Решение. Площадь сектора равна

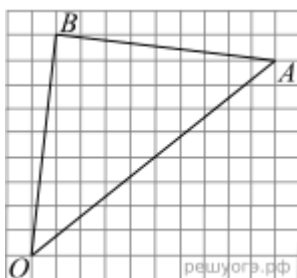
$$S = \frac{\pi \cdot 81}{360} \cdot 120 = 27\pi.$$

Ответ: 27

18.



Найдите тангенс $\angle AOB$



Решение. Найдём каждую из сторон треугольника AOB , чтобы показать, что он прямоугольный.

$$OB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$OA = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164}$$

Таким образом, $OA^2 = OB^2 + AB^2$

$$\operatorname{tg} AOB = \frac{AB}{OB} = 1$$

Ответ: 1

19. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 2) Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям.
- 3) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.

Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.

Решение. Проверим каждое из утверждений.

- 1) «Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны» — *неверно*: такого признака равенства треугольников нет.
- 2) «Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям» — *верно*, по теореме о средней линии трапеции она параллельна основаниям и равна их полусумме.
- 3) «Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов» — *верно*, для того, чтобы существовал треугольник, сумма любых его двух сторон должна быть больше третьей стороны.

Ответ: 23

20. Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(a) = \frac{a(6-a)}{a-3}$.

Решение. Найдем значение выражения:

$$\frac{p(a)}{p(6-a)} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{6-a-3}{(6-a)(6-(6-a))} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{-a+3}{(6-a)a} = -1.$$

Ответ: -1.

21. Из пунктов A и B , расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от A . Найдите скорость пешехода, шедшего из A , если известно, что он шел со скоростью, на 1 км/ч большей, чем пешеход, шедший из B , и сделал в пути получасовую остановку.

Решение. Пусть скорость пешехода, шедшего из пункта A , равна x км/ч, $x > 1$. Тогда скорость пешехода, шедшего из пункта B , равна $(x-1)$ км/ч.

Составим таблицу по данным задачи:

Скорость, км/ч Время, ч Расстояние, км

Пешеход, шедший из A	x	$\frac{9}{x}$	9
Пешеход, шедший из B	$x - 1$	$\frac{10}{x - 1}$	10

Так как пешеход, шедший из A , сделал по пути остановку на $\frac{1}{2}$ ч., а вышли пешеходы одновременно, можно составить следующее уравнение:

$$\frac{10}{x-1} - \frac{9}{x} = \frac{1}{2} \quad x > 1 \Leftrightarrow 20x - 18(x-1) = x(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 6 \end{cases} \quad x > 1 \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6 км/ч.

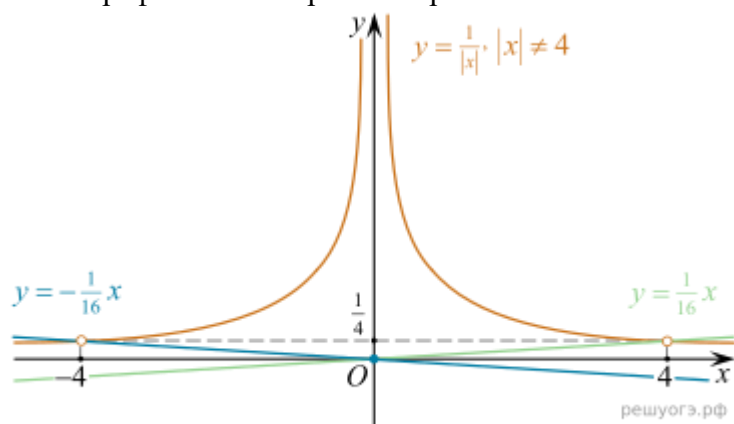
22. Постройте график функции $y = \frac{|x| - 4}{x^2 - 4|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

Решение. Преобразуем выражение: $\frac{|x| - 4}{x^2 - 4|x|} = \frac{|x| - 4}{|x|(|x| - 4)} = \frac{1}{|x|}$ при $|x| \neq 4$.

$$y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{если } x \neq \pm 4, \\ \text{не определена} & \text{при } x = -4 \text{ или } x = 4. \end{cases}$$

Значит,

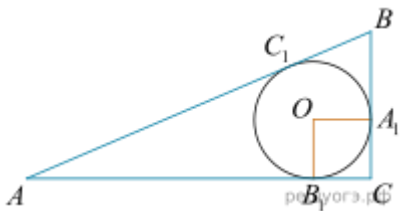
Построим ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ и удалим точку $\left(4; \frac{1}{4}\right)$. Затем построим вторую часть графика симметрично первой относительно оси ординат.



На рисунке видно, что прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, либо проходит через одну из удаленных точек $\left(4; \frac{1}{4}\right)$ или $\left(-4; \frac{1}{4}\right)$. Этим случаям соответствуют значения $k = 0$, $k = -\frac{1}{16}$ и $k = \frac{1}{16}$.

Ответ: $0, -\frac{1}{16}, \frac{1}{16}$.

23. В треугольнике ABC угол C равен 90° , радиус вписанной окружности равен 3. Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 15$.



Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Радиус вписанной окружности обозначим r . Тогда $AC_1 = AB_1, BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1 = r$. Периметр треугольника ABC равен $2AC_1 + 2BC_1 + 2CA_1 = 2AB + 2r$. Полупериметр p равен $AB + r$.

По формуле площади треугольника находим

$$S = p \cdot r = (AB + r) \cdot r = (15 + 3) \cdot 3 = 54.$$

Ответ: 54.

Другое решение.

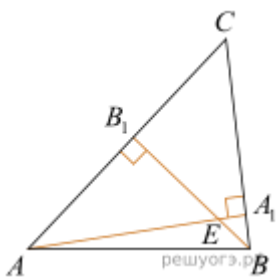
Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Пусть $AC_1 = AB_1 = x, BC_1 = BA_1 = y$. Тогда $AC = x + r, BC = y + r, AB = x + y$. Учитывая, что $r = 3$ и $x + y = 15$, по теореме Пифагора получим

$$(x + 3)^2 + (15 - x + 3)^2 = 15^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = 6. \end{cases}$$

Следовательно, один из катетов треугольника равен $9 + 3 = 12$, второй катет равен $6 + 3 = 9$, и площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54.$$

24. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.



Решение. Рассмотрим треугольники AEB_1 и BEA_1 — они прямоугольные, углы AEB_1 и BEA_1 равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{EB_1}{EA_1} = \frac{AE}{EB}$.

Рассмотрим треугольники EB_1A_1 и AEB , углы AEB и B_1EA_1 равны как вертикальные, из

предыдущей пропорции $\frac{EB_1}{AE} = \frac{EA_1}{EB}$, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.

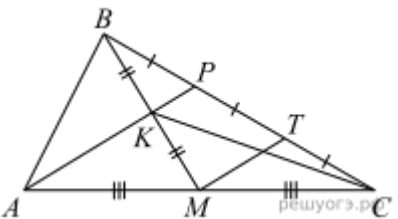
См. также.

Аналогичное задание с тупоугольным треугольником: 340854.

Примечание.

Увидеть угол AA_1B_1 будет легче, если соединить точки A_1 и B_1 .

25. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника $KPCM$.



Решение. Проведем отрезок MT , параллельный AP . Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S . Тогда площадь треугольника KPC , имеющего ту же высоту и вдвое больше основание, равна $2S$. Значит, площадь треугольника $СКВ$ равна $3S$ и равна площади треугольника $СМК$ (треугольники имеют одну высоту, проведенную из вершины C , и равные основания), которая в свою очередь равна площади треугольника AMK . Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK .

Итак, $S_{BKP} = S$, $S_{KPC} = 2S$, $S_{СМК} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}$, $S_{KPCM} = 5S$. Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5 = 0,6$.

Ответ: 0,6.